

مجلة اتحاد الجامعات العربية
العدد السابع عشر
محرم ١٤٠١هـ / ١٩٨٠م

بحث :

الجبر والمقابلة
لحمد بن موسى الخوارزمي

الدكتور محمد مرسى أحمد

الجبر والمقابلة

لمحمد بن موسى الخوارزمي

الدكتور محمد مرسى أحمد

أستاذ الرياضة السابق بجامعة القاهرة

محمد بن موسى الخوارزمي

جاء في كتاب الفهرست لابن النديم (الذي تم تأليفه سنة ٩٨٧ ميلادية) طبعة القاهرة :

«الخوارزمي واسمه محمد بن موسى ، وأصله من خوارزم ، وكان منقطعاً إلى خزانة الحكمة للمأمون ، وهو من أصحاب علوم الهيئة ، وكان الناس قبل الرصد بعده يعملون على زيجيه الأول والثاني ويعرفان بالسند هند وله من الكتب ، كتاب التاريخ نسختين أولى وثانية ، وكتاب الرخامة ، وكتاب العمل بالاسطرلاب
ولا نعلم على وجه التحقيق تاريخ ولادة الخوارزمي ولا تاريخ وفاته ، إلا أن ماورد في كتاب فهرست ابن النديم عن انقطاع الخوارزمي إلى مكتبة المأمون الذي حكم من سنة ٨١٣ إلى سنة ٨٣٣ بعد الميلاد ، يدلنا على عصر اشتغال المأمون بالعلم والأدب ، ويعزز كلام ابن النديم ما هو وارد في كتاب الجبر والمقابلة من إشارة إلى المأمون حيث قال :

«وقد شجعني ما فضل الله به المأمون أمير المؤمنين مع الخلافة التي حاز له إرثها وأكرمه بلباسها وحلاه بزينتها من الرغبة في الأدب وتقريب أهله وإدنائهم وبسط كنفه لهم ومعونته إياهم على إيضاح ما كان مشتبهاً ، وتسهيل ما كان مستوعراً ، على أن ألقت من كتاب الجبر والمقابلة كتاباً مختصراً حاصراً للعظيم الحساب وجليله ، لما يلزم الناس من الحاجة إليه » فهذه العبارة وما ورد في كتاب ابن النديم تدل دلالة واضحة على معاصرة الخوارزمي للمأمون وتمكنا من تحديد حياة الخوارزمي تحديداً إجمالياً وإن

لم نتمكن من تحديد تاريخ ولادته وتاريخ وفاته على وجه التحقيق . ولعله من المناسب هنا أن نشير إلى خطأ وقعنا فيه في الطبقات الأولى لكتاب الجبر والمقابلة الذي ساهمت فيه مع أستاذنا الجليل المغفور له الدكتور على مصطفى مشرفة ، ذلك أننا نقلنا عن سوتر المستشرق الألماني أن محمد بن موسى الخوارزمي كان أحد أبناء بني موسى الذين كلفهم المأمون بقياس درجة من درجات محيط الكرة الأرضية ، والصحيح أن بني موسى هؤلاء كانوا غير محمد بن موسى الخوارزمي وكان أبوهم منقطعاً إلى مكتبة المأمون في زمن الخوارزمي ذاته ، وقد صحح ذلك في الطبعة الأخيرة من الكتاب المذكور .

ولم تقتصر شهرة الخوارزمي عند علماء العرب الذين تابعوا أعماله بالشرح والتعليق ، وإنما ذاع صيته وامتد أثره إلى بلاد الإفرنج فقد صار اسمه كلمة دخلت أغلب معاجم اللغة الإنجليزية فمثلاً تستخدم كلمة الجورزم التي هي ولا شك تحريف لاسم الخوارزمي للدلالة على الطريقة الوضعية في حل المسائل . كما أن الشاعر الإنجليزي تشوسر يستخدم كلمة أوجرم للدلالة على الصفر ، ذلك لأن طريقة الحساب الهندية بما في ذلك استخدام الصفر إنما وصلت إلى الغرب عن طريق كتاب الخوارزمي في الحساب . كما أن اسم علم الجبر في جميع لغات العالم هو الكلمة العربية التي استخدمها الخوارزمي اسماً لكتابه . كما أن الأعداد من الواحد إلى العشرة كانت تعرف في اللاتينية اسم الجورزمس . كما أن الكلمة الأسبانية التي معناها الأرقام أو الأعداد هي جوارزمو .

نشأة علم الجبر :

علم الجبر - شأنه في ذلك شأن كل العلوم والمعارف - لم ينشأ علماً مكتملاً وإنما ظهر في معارف الحضارات القديمة على هيئة مسائل متفرقة هندسية أو حسابية استخدمت في حلها رموز ، ولم يعرف لهذا النوع من الحساب اسم خاص حتى جاء محمد بن موسى الخوارزمي فوضع قواعد هذا العلم وأعطاه اسمه وسرى فيما بعد كيف اختير اسم هذا العلم من طريقة حل مسائله كما وصفها الخوارزمي .

وأقدم كتاب مدرسي وصل إلى أيدينا هو بردى أحميس الذي يرجع إلى سنة ١٧٠٠ قبل الميلاد وقد قام بهذا البردى وترجمته إلى اللغة الألمانية أيزناور وطبع

بلييتزج عام ١٨٧٧ ، كما قام بنشر صور لهذا البردى ولس بدج وطبع بلندن عام ١٨٩٨ بعد الميلاد .

وفى بردى أحميس نجد معادلة الدرجة الأولى ذات المجهول الواحد على الصورة $s = b$ كما نجد للكمية المجهولة رمزا خاصا كالحال اليوم فى علم الجبر وكما نجد ما يدل على استخدام المعادلات الآتية الخطية .

وبعد ذلك التاريخ ولكن قبل العصر الذهبى للحضارة الإغريقية نجد معادلات الدرجة الثانية فى الآثار المصرية كما نجد مسائل تحتاج فى حلها إلى معادلتين آتيتين إحداهما أو كلاهما من الدرجة الثانية وفى المثال الآتى المأخوذ من مؤلف للعالم المستشرق كانتور (مطبوع بلييتزج عام ١٩٠٧ بعد الميلاد) نجد مسألة تحتاج فى حلها إلى معادلات الدرجة الثانية .

إذا طلب منك أن تقسم ١٠٠ ذراع مربع بين مربعين بحيث يكون ضلع أحد المربعين ثلاثة أرباع ضلع المربع الآخر فأوجد كلا من المجهولين - وبلى ذلك حل المسألة بافتراض أن ضلع أحد المربعين الوحدة وأن ضلع الآخر هو $\frac{3}{4}$ الوحدة وبذلك يكون مجموع المساحتين $\frac{25}{16}$ الذى جذره $\frac{5}{4}$ وجذر المائة ١٠ فتكون نسبة ١٠ إلى طول الضلع المطلوب كنسبة $\frac{5}{4}$ إلى ١ ومنه يكون ضلع أحد المربعين ٨ والآخر ٦

والمقابل الجبرى لهذا الحل الهندسى هو بداهة

$$\begin{aligned} s^2 + v^2 &= 100 \\ s &= \frac{3}{4}v \end{aligned}$$

وما تجدر الإشارة إليه أن علامة الجذر التربيعى قد استخدمت فى حل هذه المعادلة وأمثالها . وتؤدى هذه المسألة إلى العلاقة العددية $100 = 28^2 + 26^2$ التى تتصل اتصالا مباشرا بالعلاقة الأبسط $25 = 24^2 + 23^2$ وتظهر هذه العلاقة فى حل مسائل أخرى من هذا النوع . وما لا شك فيه أن المصريين القدماء كانوا يعلمون صحة النظرة النسبية إلى فيثاغورس والتى تقول إن المربع المنشأ على الوتر فى المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين .

وقد وضع البابليون القدماء جداول للمربعات والمكعبات ولا تزال هذه الجداول محفوظة في صحف سنكرة المشهورة وهى صحف معاصرة لبردى أحميس . ويقول كانتور إن العبرانيين القدماء كانوا يعرفون العلاقة (٣ ، ٤ ، ٥) للمثلث القائم الزاوية كما أن رياضى الصين كانت لهم دراية أيضا بهذه العلاقة وبحل مسائل المربعات .

ويعتبر في حكم المقرر الآن أن رياضى الإغريق كانوا يعلمون الحل الهندسى لمعادلات الدرجة الثانية في عصر فيثاغورس . وفي كتب إقليدس ذاته مسائل تؤول إلى حلول هندسية لمعادلات الدرجة الثانية ، ومن ذلك عملية قسمة مستقيم إلى جزأين بحيث تكون مساحة المستطيل المكون من المستقيم وأحد الجزأين مساوية للمربع المنشأ على الجزء الآخر .

ولعل أول حل تحليلي لمعادلة الدرجة الثانية نستطيع أن نجزم به يرجع إلى هيرون الذى عاش في الإسكندرية بعد مولد المسيح بقليل . ففى أحد مؤلفات هيرون المسمى مترىكا والمنشور فى ليتزج عام ١٩٠٣ نجد نصا على أنه إذا علم مجموع جزأى مستقيم وحاصل ضربهما علم كل من الجزأين . كذلك اشتغل ديوفانيوس الذى عاش فى الإسكندرية فى القرن الثالث الميلادى - اشتغل بحل معادلة الدرجة الثانية وظهرت فى نفس الوقت محاولات فى الهند .

ومع أن مسائل هندسية وحسابية ظهرت فى الحضارات القديمة فى مصر وبابل ، فى الهند والصين ، واليونان ، إلا أن كلا من هذه البلاد قد تأثر بما يجرى فى البلاد الأخرى ، وكل هذا يعتبر مقدمة لنشوء علم الجبر بمعناه الصحيح - كما تدل هذه المحاولات على أن نشوء هذا العلم لم يكن بمجهودا صناعيا وتمرينا عقليا بل كان نتيجة طبيعية لاهتمام القوم بمسائل الهندسة وخواص الأعداد .

كتاب الجبر والمقابلة

افتتح محمد بن موسى الخوارزمى كتابه فى الجبر والمقابلة بحمد الله على نعمه والصلاة على نبيه محمد ﷺ ثم قال : ولم تزل العلماء فى الأزمنة الحالية والأتم الماضية يكتبون الكتب مما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة نظرا لمن بعدهم واحسابا للأجر بقدر المداقة ، ورجاء أن يلحقهم من أجر ذلك وذخره وذكره ويبقى

لهم من لسان الصدق ما يصغر في جنبه كثير مما كانوا يتكلفونه من المؤونة ، ويحملونه على أنفسهم من المشقة في كشف أسرار العلم وغامضه ، إما رجل سبق إلى ما لم يكن مستخرجاً قبله فورثه من بعده ، وإما رجل شرح مما أبقى الأولون ما كان مستغلقاً فأوضح طريقه وسهل مسلكه وقرب مأخذه ، وإما رجل وجد في بعض الكتب خلافاً فلم يَشَعْرُهُ وأقام أوده وأحسن الظن بصاحبه غير راد عليه ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه . وقد شجعتني ما فضل الله به الإمام المأمون أمير المؤمنين مع الخلافة التي حاز له إرثها وأكرمها بلباسها وحلاه بزینتها ، من الرغبة في الأدب وتقريب أهله وإدنائهم وبسط كنفه لهم ومعوته إياهم على إيضاح ما كان مستحيها وتسهيل ما كان مستوعراً ، على أن ألقت من كتاب الجبر والمقابلة كتاباً مختصراً حاوياً للطيف الحساب وجلبه لا يلزم الناس من الحاجة إليه في مواريتهم ووصاياهم وفي مقاسمتهم وأحكامهم وتجاراتهم ، وفي جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الأرضين وكرى الأنهار والهندسة وغير ذلك من وجوهه وفنونه ، مقدماً لحسن النية فيه وراجياً لأن ينزله أهل الأدب بفضل ما استودعوا من نعم الله تعالى وجليل آلائه وجميل بلائه عندهم منزلة ، وبالله توفيتني في هذا وفي غيره عليه توكلت وهو رب العرش العظيم .

ثم صار الخوارزمي إلى التعريف بمصطلحات العلم الذي يبحثه قائلاً : « وإني لا نظرت فيما يحتاج إليه الناس من الحساب وجدت جميع ذلك عدداً ووجدت جميع الأعداد إنما تركبت من الواحد ، والواحد داخل في جميع الأعداد . ووجدت جميع ما يلفظ به من الأعداد ما جاوز الواحد إلى العشرة يخرج الواحد ثم ثنتي العشرة وتثلث كما فعل بالواحد فتكون منها العشرون والثلاثون إلى تمام المائة ثم ثنتي المائة وتثلث كما فعل بالواحد وبالعشرة إلى الألف ثم كذلك تردد الألف عند كل عقد إلى غاية المدرك من العدد .

ووجدت الأعداد التي نحتاج إليها في علم الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور وأموال وعدد مفرد لا ينسب إلى جذر ولا إلى مال :

فالجذر منها كل شيء مضروب في نفسه من الواحد وما فوقه من الأعداد وما دونه من الكسور ، والمال كل ما اجتمع من الجذر المضروب في نفسه ، والعدد المفرد كل ما لم يلفظ به من العدد بلا نسبة إلى جذر ولا إلى مال .

ولما كان الخوارزمي إزاء البحث في معادلات الدرجة الثانية فقد بين الحدود الثلاثة التي تدخل في تركيب هذه المعادلة ، فالجذر أو الشيء كما كان يسميه الخوارزمي هو ما يرمز له عادة بالرمز س ، والمال ما اجتمع من ضرب الجذر في نفسه س² ثم الحد الخالي من س وقد بدأ الخوارزمي بذكر المعادلات التي تحتوى حدين اثنين فقط وبين أنها ثلاثة أشكال .

أموال تعدل جذورا ، وأموال تعدل عددا ، وجذور تعدل عددا وبين بالمثال حل كل نوع من هذه الأنواع فقال مثلا :

«فأما الأموال التي تعدل الجذور فمثل قولك مال يعدل خمسة أجزاره (س² = ٥ س) فجذر المال خمسة والمال خمسة وعشرون وهو خمسة أجزاره . وهكذا سار في تبيان الحال والأمثلة لهذه المعادلات ذات الحدين الإثنين فقط ثم يمضي الخوارزمي بعد ذلك إلى تبيان المعادلات ذات الحدود الثلاثة فيقول «ووجدت هذه الضروب الثلاثة التي هي الجذور والأموال والعدد تقرن فيكون منها ثلاثة أجناس مقترنة وهي :

أموال وجذور تعدل عددا
وأموال وعدد تعدل جذورا
وجذور وعدد تعدل أموالا

ولما كان كلام الخوارزمي مقصورا على الأعداد الموجبة فقط دون السالبة فقد اقتضى ذلك تقسيم معادلة الدرجة الثانية ذات الثلاثة الحدود إلى تلك الأنواع الثلاثة وهي حسب الاصطلاح الحديث

$$\begin{aligned} \text{أ س}^2 + \text{ب س} &= \text{ح} \\ \text{أ س}^2 + \text{ح} &= \text{ب س} \\ \text{ب س} + \text{ح} &= \text{أ س}^2 \end{aligned}$$

وفي بيان طريقة الحل لكل نوع يقول الخوارزمي :

فأما الأموال والجذور التي تعدل العدد فمثل قولك مال وعشرة أجزاره يعدل تسعة وثلاثين درهما. ومعناه أي مال إذا زدت عليه مثل عشرة أجزاره بلغ ذلك كله تسعة

وثلاثين . فَبَابُهُ أن تنصف الأجزاء وهي في هذه المسألة خمسة فتفسرها في مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتقص منه نصف الأجزاء وهو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذي تريد والمال تسعة . وكذلك لو ذكر مائتين أو ثلاثة أو أقل أو أكثر فأردده إلى مال واحد وأردد ما كان معه من الأجزاء والعدد إلى مثل ما رددت إليه المال .

وبقليل من النظر نرى أن هذه هي طريقة إكمال المربع في حل معادلات الدرجة الثانية لأنه إذا كانت المعادلة هي :

$$س^2 - ١٠ س = ٣٩$$

$$كان (س - ٥)^2 = ٣٩ - ١٠ س = ٢٥ = ٥^2$$

$$وأدى ذلك إلى الحل س = ٣$$

وهذا ما قال به الخوارزمي .

وبعد أن بين على هذه الصورة طريقة حل كل نوع من الأنواع الثلاثة رسم لكل نوع صورة تبين كيف أنه أكمل المربع في حل كل واحدة من هذه الأنواع . ثم انتهى من هذا بأن قال ووجدنا كل ما يعمل به من حساب الجبر والمقابلة لا بد أن نخرجك إلى أحد الأبواب الستة التي وصفت في كتابي هذا وقد أتيت على تفسيرها فأعرف هذا . ثم انتقل الخوارزمي إلى الكلام عن القواعد الأصلية في حساب الجديد . يقول وأنا مخبرك كيف تضرب الأشياء وهي الجذور بعضها في بعض إذا كانت منفردة أو كان معها عدد أو كان مستثنى منها عدد أو كانت مستثناة من عدد . وكيف تجمع بعضها إلى بعض وكيف تنقص بعضها من بعض ، أعلم أنه لا بد لكل عدد يضرب في عدد من أن يضاعف أحد العددين بقدر ما في الآخر من الآحاد فإذا كانت عقودا ومعهما آحاد أو مستثنى منها آحاد فلا بد من ضربها أربع مرات : العقود في العقود . والعقود في الآحاد . والآحاد في العقود . والآحاد في الآحاد . فإذا كانت الآحاد التي مع العقود زائدة جميعا فالضرب الرابع زائد . وإذا كانت ناقصة جميعا فالضرب الرابع زائد أيضا . وإذا كان أحدها ناقصا والآخر زائدا فالضرب الرابع ناقصا . ثم يضرب الخوارزمي الكثير من الأمثلة على تطبيق هذه القاعدة .

وأخذ الخوارزمي يسوق المثال تلو المثال على تطبيقات القواعد التي بينها وأنواع المعادلات التي شرحها ، ولما كان قد قسم معادلات الدرجة الثانية إلى ست أقسام فقد ساق الأمثلة على هذه الأنواع الستة وبين طريقة حلها قال : فالأولى من الست نحو فلك عشرة قسمتها قسمين فضربت أحد القسمين في الآخر ثم ضربت أحدهما في نفسه فصار المضروب في نفسه مثل أحد القسمين في الآخر أربع مرات ، فقياسه أن تجعل أحد القسمين شيئا والآخر عشرة إلا شيئا فتضرب شيئا في عشرة إلا شيئا فتكون عشرة أشياء إلا مالا ثم تضربه في أربعة لقولك أربع مرات فتكون أربعة أمثال المضروب من أحد القسمين والآخر فيكون ذلك أربعين شيئا إلا أربعة أموال ، ثم تضرب شيئا في شيء وهو أحد القسمين في نفسه فيكون مالا يعدل أربعين شيئا إلا أربعة أموال ، فاجبرها بالأربعة الأموال وزده على المال فيكون أربعين شيئا تعدل خمسة أموال ، فالمال الواحد يعدل ثمانية أجدار وهو أربعة وستون وجذرها ثمانية وهو أحد القسمين المضروب في نفسه والباقي من عشرة إثنان وهو القسم الآخر ، فقد أخرجتك هذه المسألة إلى أحد الأبواب الستة وهي أموال تعدل جذورًا فاعلم ذلك .

وقوله أربعين شيئا إلا أربعة أموال تعدل مالا فاجبرها بالأربعة الأموال وزدها على المال هو أصل كلمة الجبر عند الخوارزمي والتي أصبحت اسما لهذا النوع من الحساب في كافة لغات العالم . وسنرى في مثال آخر كيف استخدم كلمة المقابلة وعن معناها عند الخوارزمي يقول :

عشرة قسمتها قسمين ثم ضربت كل قسم في نفسه وجمعتها فكانا ثمانية وخمسين درهما قياسه أن تجعل أحد القسمين شيئا والآخر عشرة إلا شيئا فاضرب عشرة إلا مالا في مثلها فتكون مائة ومالا إلا عشرين شيئا ثم تضرب شيئا في شيء فيكون مالا ثم تجمعها فيكون ذلك مائة ومالين إلا عشرين شيئا تعدل ثمانية وخمسين درهما .

١٠٠ | ٢١ س^١ -- ٢٠ س = ٥٨

فاجبر المائة والمالين بالعشرين شيئا الناقصة وزدها على الثمانية والخمسين فيكون مائة ومالين تعدل ثمانية وخمسين درهما وعشرين شيئا فاردد ذلك إلى مال واحد وهو أن

تأخذ نصف مامعك فيكون خمسين درهما ومالا تعدل تسعة وعشرين درهما وعشرة أشياء .

$$٥٠ + س^٢ = ٢٩ + ١٠ س$$

فقابل به وذلك بأن نلقى من الخمسين تسعة وعشرين فيبقى واحد وعشرون ومال تعدل عشرة أشياء

$$٢١ + س^٢ = ١٠ س$$

فنصف الأجزاء يكون خمسة واضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين فالتى منها الواحد والعشرين التى مع المال فتبقى أربعة فخذ جذرها وهو اثنان فانقصه من نصف الأجزاء التى هى خمسة يبقى ثلاثة وهو أحد القسمين والآخر سبعة فقد أخرجتك هذه المسألة إلى أحد الأبواب الستة وهى أموال وعدد تعدل جذورا .

ونلاحظ أمرين الأول أن الخوارزمى يرد الأموال إلى مال واحد بمعنى أنه يعمل معامل $س^٢$ فى معادلاته مساوياً للواحد الصحيح قبل تطبيق قانون المال المربع . والثانى أنه يجبر الناقص بما يساويه ويزيده على الطرف الآخر حتى لا يتعامل مع الحدود السالبة .

وثمة ملاحظة غاية فى الأهمية ذلك أن الخوارزمى حين يأخذ نصف الأجزاء ويضربها فى مثلها ثم يلقبها من العدد المفرد إن زادت هذه على هذا العدد المطلق خرج الباقى سالباً ولا يستطيع أن تخرج جذره ، وقد أسمى مثل هذه المعادلة بالمعادلة المستحيلة وقد بقى هذا اسمها إلى القرن السابع عشر الميلادى حين صار تعميم العدد ليشمل الأعداد التخيلية والمركبة وأصبح لكل معادلة من الدرجة الثانية حلان سواء أكانا حقيقين أم تخيلين

المعاملات

يقول الخوارزمى اعلم أن معاملات الناس كلها من البيع والشرى والصرف والإجارة وغير ذلك على وجهين بأربعة أعداد يلفظ بها السائل وهى المسعر والسعر والتمن والمتمن . فالمعد الذى هو المسعر مبين للمعد الذى هو التمن . والمعد الذى هو

السعر مباين للعدد الذى هو المثلث . وهذه الأعداد الأربعة ثلاثة منها أبدا ظاهرة معلومة وواحد منها مجهول ، وهو الذى فى قول القائل كم وعنه يسأل السائل . والقياس فى ذلك أن تنظر إلى الثلاثة الأعداد الظاهرة فلا بد أن يكون منها اثنان كل واحد منها مباين لصاحبه فتضرب العددين الظاهرين المتباينين كل واحد منهما فى صاحبه فما بلغ فاقسمه على العدد الآخر الظاهر الذى متباينه مجهول فما خرج لك فهو العدد المجهول الذى يسأل عنه السائل وهو مباين للعدد الذى قسمت عليه ويصوغ هذه القاعدة شعرا فيقول :

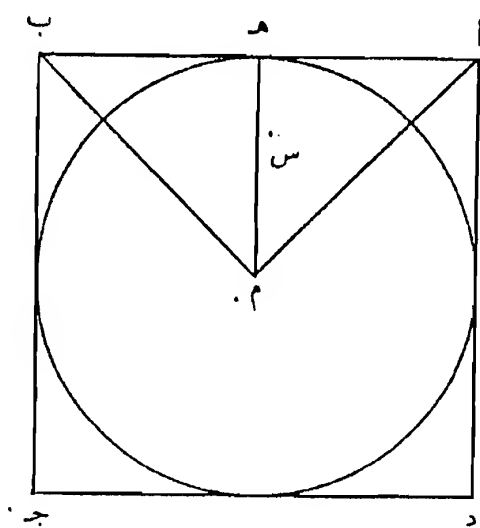
ان رمت بيعا أو شراء لما يكال فى العادة أو يتزن
فاقسم على الأوسط فى كم لنا واقسم على الأول فى كم نحن

ومثال ذلك فى وجه منه إذا قيل لك عشرة بستة كم بأربعة فقوله عشرة هو العدد المسعر وقوله بستة هو السعر وقوله كم هو العدد المجهول المثلث وقوله بأربعة هو العدد الذى هو الثمن فالعدد المسعر الذى هو عشرة مباين للعدد الذى هو الثمن الذى هو أربعة فاضرب العشرة فى الأربعة وهما المتباينان الظاهران فيكون أربعين فاقسمها على العدد الآخر الظاهر الذى هو السعر وهو ستة فيكون ستة وثلثين وهو العدد المجهول الذى فى قول القائل كم وهو المثلث ومباينه الستة الذى هو السعر .

المساحة

ثم ينتقل الخوارزمى بعد ذلك إلى المساحة فيقول اعلم أن معنى واحد فى واحد إنما هى مساحة ومعناه ذراع فى ذراع فكل شكل متساوى الزوايا والأضلاع يكون من كل جانب واحد فإن السطح كله واحد فإن كان من كل جانب اثنان وهو متساوى الأضلاع والزوايا فالسطح كله أربعة أمثال السطح الذى هو ذراع فى ذراع وكذلك ثلاثة فى ثلاثة وما زاد على ذلك أو نقص وكذلك نصف فى نصف بربع وغير ذلك من الكسور فعل هذا ... وكل مثلث متساوى الأضلاع فإن ضربك عموده ونصف القاعدة التى يقع عليها العمود هو تكبير (مساحة) ذلك المثلث وكل معينة متساوية الأضلاع فإن ضربك أحد القطرين فى نصف الآخر هو تكبيرها (مساحتها) وكل مدورة (دائرة) فإن ضربك القطر فى ثلاثة وسبع هو الدور الذى يحيط بها وهو

اصطلاح بين الناس من غير اضطرار . ولأهل الهندسة قولان آخريان : أحدهما أن تضرب القطر في مثله ثم في عشرة ثم تأخذ جذر ما اجتمع فما كان فهو الدور . والقول الثاني لأهل النجوم منهم وهو أن تضرب القطر في اثنين وستين ألفا وثمانمائة واثنين وثلاثين ثم تقسم ذلك على عشرين ألفا فما خرج فهو الدور وكل ذلك قريب بعضه من بعض والدور (المحيط) إذا قسمته على ثلاثة وسبع يخرج القطر وكل مدورة فإن نصف القطر في نصف الدور (المحيط) هو التفسير لأنه كل ذات أضلاع وزوايا متساوية من المثلثات والمربعات والخمسات وما فوق ذلك فإن ضربك نصف ما يحيط بها في نصف قطر أوسع دائرة يقع فيها تكسيها (مساحتها) . ونبين نحن ذلك بالقول إن مساحة كل ذات أضلاع وزوايا متساوية تساوى حاصل ضرب نصف ~~المحيط~~ ذلك المضلع في نصف قطر أوسع دائرة تمس أضلاعه من الداخل خذ مثلا المربع هكذا :



فإذا كان ضلع المثلث ٢ س فإن نصف قطر أوسع دائرة داخلية وهي التي تمس أضلاعه من الداخل هي س أو نصف طول ضلع المربع ويكون حاصل ضرب نصف ما يحيط بالمربع وهو ٤ س في نصف قطر الدائرة وهو س يكون ما اجتمع من هذا ٤ س^٢ وهو مساحة المربع . ويكون ما جاء به الخوارزمي لبيان مساحة الدائرة

مأخوذاً على قياس مساحة المضلعات المنتظمة اثباتاً طريفاً وسهلاً لحساب مساحة الدائرة بضرب نصف محيطها في نصف قطرها .

ونرى من ذلك أن الخوارزمي ذكر ثلاث تقريبات للنسبة ط بين محيط الدائرة وقطرها وهي الجذر التربيعي للعدد ١٠ وثلاثة وسبع ، ١٤١٦ ، ٣٠ ثم قال بعد ذلك إن أقربها للحقيقة هو الثالث وهو ما كان يستعمله أهل النجوم (علماء الفلك) كما أن أبعداها عن الصواب هو الجذر التربيعي للعدد عشرة . وكل ذلك تقريب لا تحقيق ولا يقف أحد على حقيقة ذلك ولا يعلم دورها إلا الله لأن الخط ليس بمستقيم فيوقف على حقيقته وإنما قبل ذلك تقريب كما قيل في جذر الأصم إنه تقريب لا تحقيق لأن جذره لا يعلمه إلا الله . وأحسن ما في هذه الأقوال أن نفسب القطر في ثلاثة وسبع لأنه أخف وأسرع والله أعلم .

وانتهى الخوارزمي من كتابه في الجبر والمقابلة بعد أن أتبعه بكتاب الوصايا وفيه تطبيق للقواعد والعمليات التي شرح .

ولعلنا قد قدمنا بعضاً مما قام به محمد بن موسى الخوارزمي في إرساء قواعد علم الجبر وحل مسائله في لغة ميسورة ومنطق سليم وتواضع اختص به أهل العلم الواصلون من علمهم غير مفتخرين على غيرهم بما أتاهم الله من فضله .